ISBN No. 978-602-19590-2-2

PROSIDING

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XVI

Bandung, 3-6 Juli 2012

"Matematika sebagai Bahtera Pendidikan untuk Mencerdaskan Kehidupan Bangsa"

Diselenggarakan oleh :

Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Padjadjaran

Bekerjasama dengan :

The Indonesian Mathematical Society (IndoMS)

DAFTAR ISI PROSIDING

halaman

BIDANG TERAPAN

TIM PROSIDING

Penanggung Jawab Prosiding:

Dr. Endang Rusyaman

Editor:

Dr. Stanley PD, M.Pd

Dr. Ema Carnia, M.Si

Dr. Nursanti Anggriani, M.Si

Bendahara :

Betty Subartini, MS.

Bidang IT :

Dr. Setiawan Hadi

Koordinator :

Bidang Aljabar	**:** Edi Kurniadi, M.Si
Bidang Analisis	**:** Alit Kartiwa, M.Si
Bidang Graf dan Kombinatorika	**:** Akmal, MT
Bidang Komputer	**:** Erick Paulus, M.Komp
Bidang Keuangan	**:** Riaman, M.Si
Bidang Teori dan Sistem Kendali	**:** Anita Triska, M.Si
Bidang Statistika	**:** Nurul Gusriani, M.Si
Bidang Terapan	**:** Firdaniza, M.Si
Bidang Pendidikan	**:** Diane Amor K, M.Pd

Staf Pendukung :

Firas Atqiya

Fahmi Chandra P.

Nurul Hanifa

Siti Dwi Setiarini

Risna Wulantini

Layout dan Cover

Reza Purwadi

Dr. Sukono

ANALISA KESTABILAN GERAK GELOMBANG AIR PADA BIDANG MIRINGDENGAN METODE KEDUA LIAPUNOV

BAMBANG AGUS S.[1], LUKMAN HANAFI[2]

[1]Pendidikan Matematika UNP Kediri, bb7agus1@gmail.com
[2]Matematika ITS surabaya, lukman@matematika.its.ac.id

Abstrak

Metode kedua Liapunov merupakan metode yang dalam analisa kestabilan terhadap sebuah sistem tidak memerlukan jawab secara langsung dari persamaan yang diberikan, akan tetapi cukup ditemukan fungsi energi darinya yang dinamakan fungsional Liapunov, analisa kestabilan sudah dapat dilakukan.

Dalam penelitian ini, dikembangkan penggunaan metode kedua Liapunov untuk menganalisa kestabilan gerak gelombang air pada bidang miring yang model matematikanya berbentuk persamaan diferensial parsial (PDP). Hasil dari penelitian ini diperoleh kejelasan tentang proses pembentukan funsional Liapunov khusus untuk PDP serta besaran fisis yang berpegaruh terhadap kestabilan sistem, yaitu kemiringan dan konstanta gesekan.

Kata kunci : *metode kedua Liapunov, gelombang air, bidang miring, PDP.*

1. Pendahuluan

Meskipun pada umumnya penyelesaian eksak dari suatu persamaan diferensial parsial sulit diperoleh, namun kita masih bisa menggali informasi secara kualitatif dari persamaan diferensial yang diberikan tanpa harus menyelesaikannya. Diantara masalah yang tergolong dalam kriteria ini adalah masalah kestabilan.

Metode kedua Liapunov merupakan metode yang dalam analisa kestabilan terhadap sebuah sistem tidak memerlukan jawab secara langsung dari persamaan yang diberikan, akan tetapi cukup ditemukan fungsi energi darinya yang dinamakan fungsional Liapunov, analisa kestabilan sudah dapat dilakukan.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menganalisa kestabilan gerak gelombang air pada bidang miring dengan terlebih dahulu menemukan fungsional Liapunov dan menentukan besaran fisis yang berpengaruh pada kestabilan sistem tersebut.

2. Metodologi

Dalam penelitian ini, pembahasan dimulai dengan menurunkan persamaan gerak gelombang air pada bidang miring berdasarkan hukum kekekalan massa dan hukum kedua Newton, yang menghasilkan persamaan diferensial parsial. Selanjutnya dibentuk fungsional Liapunov dari persamaan gerak yang diperoleh dengan metode-P yang hasilnya dipakai untuk mendapatkan informasi tentang kestabilan sistem.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan diferensial yang mengendalikan gerak gelombang air pada bidang miring adalah

(a) $\frac{\partial(uh)}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0$ (1)

(b) $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} + g'\frac{\partial h}{\partial x} = g's C_f \frac{u^2}{h}$ (2)

Untuk memudahkan penerapan metode-P (fungsional Liapunov untuk PDP), dua persamaan di atas direduksi menjadi satu persamaan, dengan cara mengamati solusi khusus dari (a) dan (b). Secra umum solusinya adalah **h** dan **u** sebagai fungsi dari **x** dan **t**. Salah satu bentuk h dan u yang memenuhi (a) dan (b) adalah keduanya konstan, h = h_0 dan u = u_0.

Guna mendapatkan hasil perhitungan yang baik, dilakukan skala variabel pada persamaan di atas pemilihan skala yang kita gunakan, sedemikian rupa sehingga solusinya menjadi h = 1 dan u = 1.

$u = u_0\bar{u}, h = h_0\bar{h}, x = l\bar{x}, t = \frac{lt}{u_0}$ (3)

Dimana *l*skala panjang arah x.

Substitusi (3) pada (a) dan (b) menghasilkan persamaan di bawah ini, dengan menghilangkan notasi bar, untuk memudahkan penulisan.

$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0$ (4)

$\frac{u_0^2}{g'h_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{ls}{h_0}\left(1 - c_f\frac{u_0^2u^2}{h_0 g' sh}\right)$ (5)

Bilangan fisik yang disebut bilangan Froude yang berbentuk $F_r = \frac{u_0^2}{g'h_0}$ dapat ditulis dalam bentuk bilangan lain, yaitu dengan menggunakan persamaan $F_r = \frac{s}{c_f}$ sehingga (5) menjadi

$F_r\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{F_r}{\sigma}\left(1 - \frac{u^2}{h}\right)$ (6)

Dengan $\sigma = \frac{h_0}{lc_f}$

Selanjutnya diamati kestabilan solusinya. Untuk itu diberikan gangguan dan diamati masalah liniernya. Gangguan pada solusi itu dituliskan dalam bentuk $h = 1 + \beta h$ dan $u = 1 + \beta u$ dengan β bilangan yang sangat kecil. Substitusi pada (4) dan (6), menguraikan dan hanya memperhatikan sampai orde β memberikan sepasang persamaan linier yang dituliskan tanpa notasi bar.

$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (7)

$F_r\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{F_r}{\sigma}(h - 2u)$ (8)

Penggunaan (7) dengan mengeliminasikan u, membawa ke persamaan dalam h. Turunkan (10) terhadap x lebih dahulu, kemudian $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$ dan $\frac{\partial h}{\partial t}$ gantikan dari (7) hasilnya

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} - (F_r^{-1} - 1)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \sigma^{-1}\left(2\frac{\partial h}{\partial t} + 3\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

Atau

$$h_{tt} + 2h_{xt} - (F_r^{-1} - 1)h_{xx} + \sigma^{-1}(2h_x + 3h_t) = 0 \qquad (9)$$

Inilah persamaan yang akan diselidiki kestabilannya dengan menggunakan metode-P.

Penggunaan metode-P dimulai dengan mendiskripsikan PDP persamaan (9) sebagai operator dalam waktu dan ruang.

$$L_h = h_{tt} + 2h_{xt} - (F_r^{-1} - 1)h_{xx} + \sigma^{-1}(2h_x + 3h_t) = 0$$
$$I_h = 2h_t + 2h_x + 2\sigma^{-1}h$$

Kemudian diintegralkan terhadap ruang dan waktu, diperoleh

$$\int_0^t \int_{x_1}^{x_2} L_h I_h \, dx dt = 0$$

$$\int_0^t \int_{x_1}^{x_2} [h_{tt} + 2h_{xt} - (F_r^{-1} - 1)h_{xx} + \sigma^{-1}(2h_x + 3h_t)][2h_t + 2h_x + 2\sigma^{-1}h] dx dt = 0$$

$$\int [h_t^2 + 4h_{xt}h_t - 2(F_r^{-1} - 1)hh_{xt} + 10\sigma^{-1}h_x h + 2h_x^2 + 2\sigma^{-1}hh_t + 2\sigma^{-1}h^2] dx$$
$$+ \int_0^t \int_{x_1}^{x_2} [2\,(F_r^{-1} - 1) - 6\sigma^{-1}hh_{xt} + 2\sigma^{-1}h_t^2 - 2h_x h_{tt} + 62\sigma^{-1}h_x^2 +$$
$$2(F_r^{-1} - 1)hh_{xt} - 2\sigma^{-1}(F_r^{-1} - 1)hh_{xx} + 6\sigma^{-2}hh_x] dx dt$$

Sehingga

$$V = \int_{x_1}^{x_2} [h_t^2 + 4h_{xt}h_t - 2(F_r^{-1} - 1)hh_{xt} + 10\sigma^{-1}h_x h + 2h_x^2 + 2\sigma^{-1}hh_t + 2\sigma^{-1}h^2] dx$$

Dan

$$\dot{V} = -\int_{x_1}^{x_2} [2\,(F_r^{-1} - 1) - 6\sigma^{-1}hh_{xt} + 2\sigma^{-1}h_t^2 - 2h_x h_{tt} + 62\sigma^{-1}h_x^2 +$$
$$2(F_r^{-1} - 1)hh_{xt} - 2\sigma^{-1}(F_r^{-1} - 1)hh_{xx} + 6\sigma^{-2}hh_x] dx$$

Dengan ditemukannya fungsional Liapunov beserta turunannya terhadap waktu, berarti informasi tentang kestabilan sistem sudah dapat diketahui. Sistem akan stabil bila $V > 0$ dan $\dot{V} < 0$. Dari persamaan itu pula akan diketahui kondisi yang berpengaruh terhadap kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari V dan $\dot{V}$ yang mengandung bilangan Froude(F_r), sehingga dari

V didapat $-2(F_r^{-1} - 1) < 0$ atau $F_r < 1$ (3)
$\dot{V}$ didapat $(4 - 2\sigma^{-1})(F_r^{-1} - 1) < 0$ atau $F_r < 1$ (4)

Jadi kondisi $F_r < 1$ menyebabkan sistem dalam keadaan stabil, sehingga untuk memeriksa kestabilan gerak gelombang air pada bidang miring cukup dilihat dari pengaruh besaran fisis yang membentuk bilangan Froude, yaitu kemiringan (α) dan konstanta gesekan (c_f). Bila yang terjadi tidak memnuhi kondisi, salah satu cara mengubahnya dengan memperkecil sudut kemiringan dari bidang.

ISBN : 978-602-19590-2-2

4. Kesimpulan

Metode kedua Liaponov dapat digunakan untuk mempelajari kestabilan sistem yang digambarkan oleh PDP asal dapat ditemukan fungsi energinya yang dinamakan *fungsional Liapunov.*Pembentukan fungsional Liapunov untuk PDP sering muncul dalam bentuk energi total (potensial dan kinetik), sedangkan metode yang paling umum dalam permasalahan ini adalah metode yang ditemukan oleh *Park dan Pritchard* yang dinamakan metode-P. Berdasarkan analisa dengan fungsional Liapunov, ditemukan kriteria kestabilan yaitu kondisi $F_r < 1$ menyebabkan sistem dalam keadaan stabil, sehingga untuk memeriksa kestabilan gerak gelombang pada bidang miring cukup dilihat dari pengaruh besaran fisis yang membentuk bilangan Froude, yaitu kemiringan dan konstanta gesekan, bila yang terjadi tidak memenuhi kondisi, salah satu cara mengubahnya dengan memperkecil sudut kemiringan dari bidang.

DaftarPustaka

[1] Benjamin, T.B., Wave Formation in Laminar Flow Down an Inclined Plane, *Journal Fluid Mechanic* II, 554-574.
[2] Park, P.C. and Pritchard, A.J., Stability Analysis in Structural Dynamics Using Liapunov Functional, *Journal of Sound and Vibration*, 1972, 25(4), 609-621.